

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СПОТВОРЕННЯ СИГНАЛУ В МІМО КАНАЛІ З КОРЕЛЬОВАНИМИ ЗАВМИРАННЯМИ

В роботі запропоновано математичну модель, що описує вплив корельованих завмирань на ймовірність помилки приймання сигналів при їх обробці в системі МІМО. Отримано вирази для верхньої і нижньої меж ймовірності помилки в МІМО каналі.

Руденко Д.Н. Математическая модель искажения сигнала в МІМО канале с коррелированными замираниями. В работе рассмотрено влияние коррелированных замираний на вероятность ошибки приема сигнала с двоичной фазовой манипуляцией в МІМО канале. Получены выражения для верхней и нижней границ вероятности ошибки в МІМО канале.

D.Rudenko Mathematical model of signal distortion in MIMO channel with correlated fading. In this paper we examine the effect of correlated fading on the probability of error signal reception with binary phase-shift keying in a MIMO channel. Expressions are obtained for the upper and lower bounds of error probability in the MIMO channel.

Ключові слова: система МІМО, ймовірність помилкового приймання, корельовані завмирання.

Вступ. Перспективні системи радіозв'язку (СРЗ) повинні забезпечувати передачу інформації у складній радіоелектронній обстановці [1, 2]. Цих цілей необхідно досягти в складних умовах багатопроменевого просторового каналу, в якому можливі глибокі завмирання сигналів, а також при жорстких обмеженнях на частотну смугу і потужність передавальних пристроїв.

Пропускна здатність та якість передачі інформації в СРЗ можна значно підвищити за рахунок використання технології „багато входів – багато виходів” (*Multiple-Input Multiple-Output* – МІМО), яка дозволяє більш ефективно використовувати потужність передавача і боротися із завмираннями сигналів [3 – 6]. Підвищення ефективності досягається за рахунок використання методів просторово-часової обробки, що забезпечують передачу і приймання паралельних потоків інформації.

Аналіз останніх публікацій. Методи оптимізації систем МІМО є об'єктом інтенсивних теоретичних досліджень протягом останніх років [7 – 11]. Однак більшість теоретичних результатів, а також методів, впроваджених в існуючі СШР, що використовують технології МІМО, не враховують залежності ймовірності помилки і пропускну здатності каналу від відношення сигнал-шум (ВСШ) на випадок довільної кореляції і глибини завмирань.

Тому **метою** роботи є розробка математичної моделі спотворень сигналу в системі МІМО в залежності від розмірності системи, впливу кореляції та глибини завмирань в багатопроменевому каналі зв'язку.

Для математичного опису SISO (Single Input – Single Output) каналу в системах цифрового зв'язку використовують комплексну дискретну модель [9]:

$$Z = XH + B; \quad (1)$$

де Z – прийнятий сигнал, H – канальний коефіцієнт, X – переданий символ, B – комплексний гауссівський шум з дисперсією σ^2 .

Для SISO каналу без завмирань вважається, що $H = 1$, тобто постійне загасання сигналу в каналі враховується величиною енергії сигналу. При використанні двійкової фазової маніпуляції (ФМ-2) завадостійкість приймання сигналів (ймовірність бітової помилки) визначається виразом [12]:

$$P_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2Q^2} \right) \right], \quad (2)$$

де $\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Крампа; $Q^2 = \frac{E}{G_0}$ – відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму.

Для SISO каналу з релеевськими завмираннями каналний коефіцієнт H є комплексною випадковою дискретною гауссівською величиною з дисперсією 0,5. Амплітуда коефіцієнта передачі має релеевський розподіл. Отже, випадкове ВСШ Q^2 матиме експоненціальний розподіл вигляду [12, 13]:

$$p(Q^2) = \frac{1}{Q_0^2} e^{-\frac{Q^2}{Q_0^2}}, \quad (3)$$

де Q_0^2 – середнє відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму в багатопробеновому каналі.

Оскільки ВСШ Q^2 є випадковою величиною, тоді необхідно спочатку знайти ймовірність бітової помилки для всіх можливих значень ВСШ Q^2 у виразі (3). Потім повинне бути виконане усереднювання цієї помилки, використовуючи функцію щільності ймовірності $f(Q^2)$ ВСШ. Отже, щоб знайти бітову помилку при передачі через релеевський канал, необхідно обчислити інтеграл

$$P_6 = \int_0^{\infty} p(Q^2) P_6(Q^2) dQ^2, \quad (4)$$

де $P_6(Q^2)$ – ймовірність бітової помилки в статичному каналі без завмирань при ВСШ рівному Q^2 .

Для каналу з релеевськими завмираннями

$$P_6(\overline{Q^2}) = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{\overline{Q^2}}{1 + \overline{Q^2}}} \right) \right]. \quad (5)$$

де $\overline{Q^2}$ – середнє значення відношення сигнал-шум.

Для SISO каналу із завмираннями Накагамі з параметром m ВСШ розподілено за законом хі-квадрат з $2m$ ступенями свободи [2]:

$$p(Q^2) = \frac{1}{(2\sigma^2)^m \Gamma(m)} Q^{2m-1} e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}}, \quad m \geq 0,5, \quad (6)$$

де $\sigma^2 = \frac{\overline{Q^2}}{2m}$, $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-t} dt$, $m > 0$ – гамма-функція. При цілому m розподіл Накагамі

описує енергетичне додавання m незалежно флюктуючих релеевських променів, при цьому із зростанням m глибина завмирань зменшується і при $m \rightarrow \infty$ завмирань не спостерігається. Випадок $m = 1$, $\Gamma(1) = 1$ відповідає релеевським завмиранням, випадок $0,5 \leq m < 1$ – завмиранням більш глибоким, ніж релеевські. Таким чином, завмирання Накагамі є найбільш загальним випадком. Після підстановки виразу (6) в формулу (5) для цілих m одержимо [2]:

$$P_6(\overline{Q^2}) = \left[0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{\overline{Q^2}}{1 + \overline{Q^2}}} \right) \right]^m \times \sum_{i=1}^m C_i^{m-1+i} \left[0,5 \left(1 + \sqrt{\frac{\overline{Q^2}}{1 + \overline{Q^2}}} \right) \right]^i. \quad (7)$$

Розглянемо випадок, коли система MIMO має в своєму складі одну передавальну і M_r приймальних антен (SIMO: Single Input – Multiple Output).

Математична модель SIMO каналу має вигляд [9]:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{H} + \mathbf{B}; \quad (8)$$

де $\mathbf{Z} = \{y_i; i=1 \dots M_r\}$ – $M_r \times 1$ вектор прийнятих сигналів, $\mathbf{H} = \{h_i; i=1 \dots M_r\}$ – $M_r \times 1$ вектор каналних коефіцієнтів передачі від загальної передавальної антени до i -ї приймальної антени, \mathbf{B} – $M_r \times 1$ вектор незалежних гауссівських однаково розподілених шумових компонент з дисперсією σ^2 для реальної та уявної частин.

Завмирання в SIMO каналі описуються випадковими величинами каналних коефіцієнтів, в загальному випадку корельованими [1, 9] з кореляційною матрицею $\mathbf{R} = M \{HH^H\} = \{ \phi_{uv} = M \{H_u H_v^*\} \}_{u,v=1 \dots M_r}$.

Для SIMO каналу з релеевськими завмираннями величини ВСШ (2) розподілені по закону хі-квадрат з 2 ступенями свободи (4), а граничні значення ймовірностей помилок у найкращому і найгіршому випадках кореляції розраховуються за формулами:

$$P_{\bar{0}\min}(\bar{Q}_\Sigma^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\bar{Q}_\Sigma^2}{N \sin^2 \varphi} \right)^{-M_r} d\varphi = \left[0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{Q}_\Sigma^2}{1 + \bar{Q}_\Sigma^2}} \right) \right]^{M_r} \times \sum_{i=1}^{M_r} C_i^{M_r-1+i} \left[0,5 \left(1 + \sqrt{\frac{\bar{Q}_\Sigma^2}{1 + \bar{Q}_\Sigma^2}} \right) \right]^i, \quad (9)$$

$$P_{\bar{0}\max}(\bar{Q}_\Sigma^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\bar{Q}_\Sigma^2}{\sin^2 \varphi} \right)^{-1} d\varphi = 0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{\bar{Q}_\Sigma^2}{1 + \bar{Q}_\Sigma^2}} \right), \quad (10)$$

де \bar{Q}_Σ^2 – середнє значення ВСШ на вході приймача з M_r антенами.

Графіки залежностей нижньої межі ймовірності помилки в SIMO каналі (9) від \bar{Q}_Σ^2 при різному M_r наведено на рис. 1. Як видно з рис. 1, SIMO канал з M_r антенами і загальними завмираннями дає тільки енергетичний вигравш, проте вигравш рознесення в ньому відсутній. При неповній корельованих завмираннях вигравш рознесення залежить від кількості антен M_r . При декорреляції завмирань і збільшенні M_r без урахування енергетичного вигравшу в граничному випадку SIMO канал з релеевськими завмираннями буде еквівалентен SISO каналу без завмирань.

Параметр розподілу Накагамі m називають числом ступенів свободи даного розподілу [8]. Також в роботах, присвячених проблематиці MIMO, зустрічається поняття числа ефективних ступенів свободи (ЕСС) [9, 11], яке показує еквівалентну кількість каналів з незалежними завмираннями, що забезпечує ту ж пропускну здатність, що і задана кількість каналів в умовах корельованих завмирань. У даному випадку число ЕСС $\rho(\mathbf{R}, \bar{Q}_\Sigma^2)$ можна визначити як параметр розподілу завмирань Накагамі в еквівалентному SISO каналі, що забезпечують ту ж ймовірність помилки, що і розглянутий канал з корельованими завмираннями Накагамі при тому ж фіксованому середньому ВСШ \bar{Q}_Σ^2 (рис. 2):

$$P_{\bar{0}}(\bar{Q}_\Sigma^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\bar{Q}_\Sigma^2}{\rho(\mathbf{R}, \bar{Q}_\Sigma^2) \sin^2 \varphi} \right)^{-\rho(\mathbf{R}, \bar{Q}_\Sigma^2)} d\varphi. \quad (11)$$

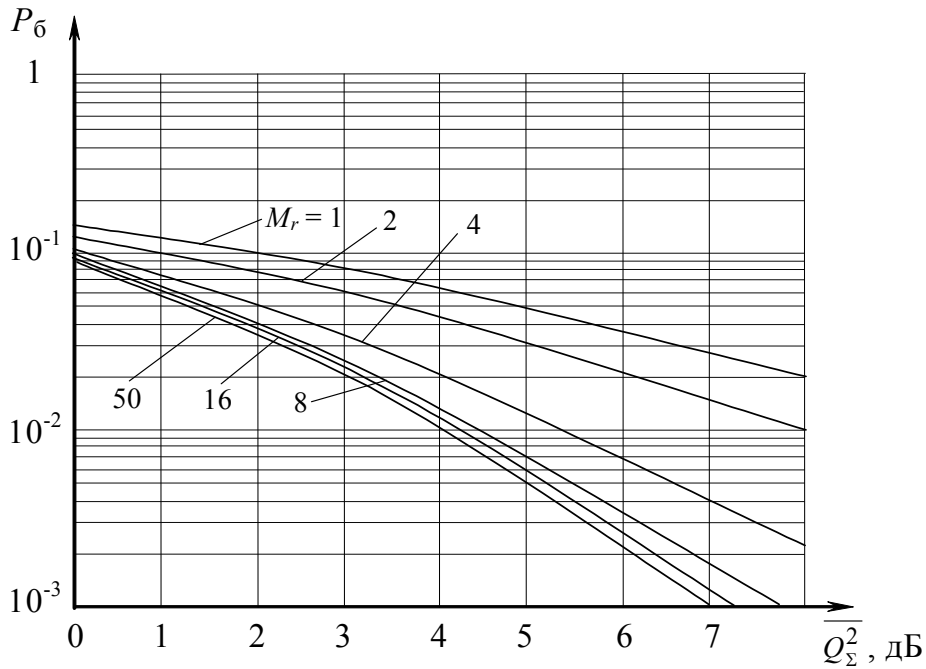


Рис. 1. Графіки залежності ймовірності помилки від відношення сигнал/шум в системі з M_r антенами

Показник степені $\rho(\mathbf{R}, \overline{Q_s^2})$ [9] називають також виграшем рознесення (diversity gain).

Як видно з співвідношень (9) і (10), для SIMO каналу з релеєвськими завмираннями число ЕСС залежно від кореляції змінюється в межах

$$1 \leq \rho(\mathbf{R}, \overline{Q_s^2}) \leq M_r. \quad (12)$$

Таким чином, повна декореляція, що відповідає нижній межі ймовірності помилки

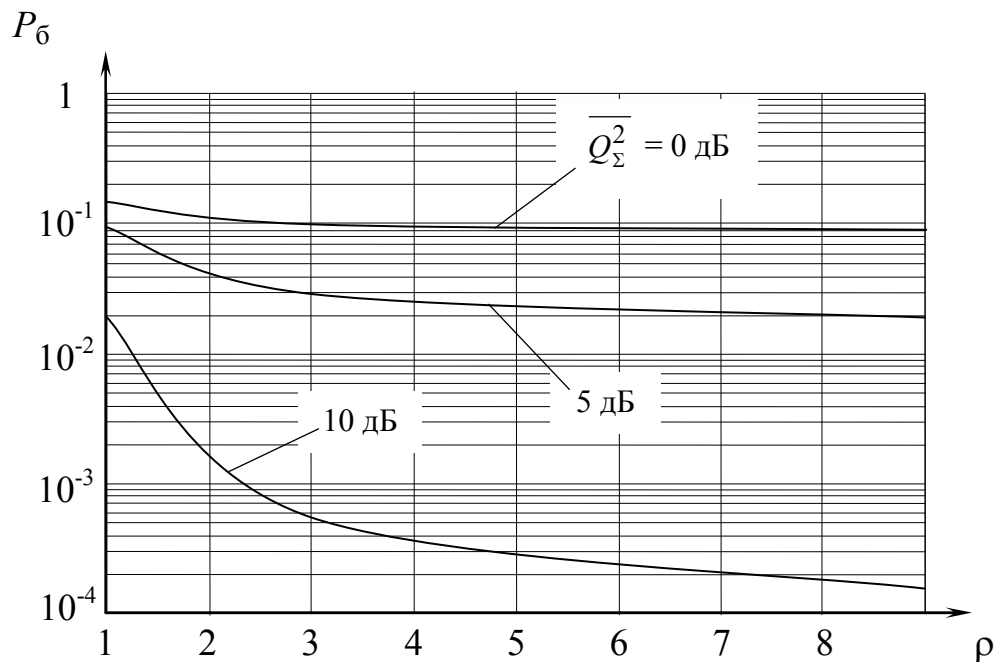


Рис. 2. Графіки залежності ймовірності помилки від ρ при різних значеннях відношення сигнал/шум

(10), забезпечує максимальне число ЕСС $\rho(\mathbf{R}, \overline{Q_\Sigma^2}) = M_r$, і, отже, максимальний виграш рознесення, а при повній кореляції, що відповідає верхній межі виразу (10), число ЕСС є мінімальним і дорівнює одиниці $\rho(\mathbf{R}, \overline{Q_\Sigma^2}) = 1$, тобто виграш просторового рознесення в даному випадку відсутній.

Слід зазначити, що при частково корельованих завмираннях число ЕСС залежить не тільки від кореляції \mathbf{R} , але також від середнього ВСШ $\overline{Q_\Sigma^2}$. Проте при малих змінах $\overline{Q_\Sigma^2}$ число ЕСС може бути оцінено як [9]:

$$P_6(\overline{Q_\Sigma^2}) = \left[0,5 \left(1 - \sqrt{\frac{\overline{Q_\Sigma^2}}{1 + \overline{Q_\Sigma^2}}} \right) \right]^{\rho(\mathbf{R}, \overline{Q_\Sigma^2})} \times \sum_{i=1}^{\rho(\mathbf{R}, \overline{Q_\Sigma^2})} C_i \rho(\mathbf{R}, \overline{Q_\Sigma^2})^{-1+i} \left[0,5 \left(1 + \sqrt{\frac{\overline{Q_\Sigma^2}}{1 + \overline{Q_\Sigma^2}}} \right) \right]^i. \quad (13)$$

У разі дробового числа ЕСС вираз (13) може служити оцінкою максимальної ймовірності помилки при підстановці в нього найближчого меншого цілого числа ЕСС.

Для системи МІМО, яка має в своєму складі M_t передавальних і M_r приймальних антен рівнянні (1) можна подати у вигляді

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{H} + \mathbf{B};$$

де $\mathbf{H} = \{h_{ij}, i = 1 \dots M_r, j = 1 \dots M_t\} - M_r \times M_t$ матриця каналних коефіцієнтів передачі від j -ї передавальної антени до i -ї приймальної антени, $\mathbf{X} = \{X_j, j = 1 \dots M_r\} - M_t \times 1$ вектор переданих відповідними антенами протягом тактового інтервалу комплексних символів; \mathbf{B} – вектор-стовпець відліків завади. При значному рознесенні передавача і приймача для опису системи МІМО достатньо двох кореляційних матриць:

$$\mathbf{R} = \mathbf{M} \left\{ \mathbf{z} \mathbf{z}^H \right\}, \quad \mathbf{R}_T = \mathbf{M} \left\{ \mathbf{z}^H \mathbf{z} \right\}.$$

При $M_r \leq M_t$ кореляція на передавальному боці може бути подолана просторово-часовим кодуванням джерела, коли з кожної передавальної антени за один тактовий інтервал передається свій незалежний символ [7], тобто $\mathbf{R}_T = \mathbf{I}_{M_r}$.

У цьому випадку МІМО-канал можна розглядати як суперпозицію M_t незалежних SIMO каналів, а ймовірність помилки розрахувати за формулою

$$P_6(\overline{Q_\Sigma^2}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \left(\mathbf{I}_{M_r} + \frac{\overline{Q_\Sigma^2}}{M_r M_t m (1 + |c|^2) \sin^2 \varphi} \mathbf{R} \right)^{-M_t m} \times \quad (14)$$

$$\times e^{-\frac{\overline{Q_\Sigma^2}}{M_r M_t m (1 + |c|^2)} C^T \left(\mathbf{I}_{M_r} \sin^2 \varphi + \frac{\overline{Q_\Sigma^2}}{M_r M_t m (1 + |c|^2)} \mathbf{R} \right)^{-1} C} d\varphi$$

звідки отримуємо вирази для граничних ймовірностей помилки в МІМО каналі з просторово-часовим кодуванням, аналогічні:

$$P_{\text{б min}}(\overline{Q_{\Sigma}^2}) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \left(1 + \frac{\overline{Q_{\Sigma}^2}}{M_r M_t m (1 + |c|^2) \sin^2 \varphi} \right) d\varphi, \quad (15)$$

$$P_{\text{б max}}(\overline{Q_{\Sigma}^2}) \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \det \left(1 + \frac{\overline{Q_{\Sigma}^2}}{M_t m (1 + |c|^2) \sin^2 \varphi} \right) d\varphi. \quad (16)$$

З виразів (15) і (16) випливає, що для МІМО каналу із завмираннями Накагамі-Райса і просторово-часовим кодуванням число ЕСС залежно від кореляції на приймальному боці \mathbf{R} лежить в межах

$$M_t m k \leq \rho(\mathbf{R}, \overline{Q_{\Sigma}^2}) \leq M_r M_t m k, \quad (17)$$

зростаючи в порівнянні з числом ЕСС SІМО каналу в M_t разів.

Однак у разі відсутності просторово-часового кодування починає проявлятися вплив кореляції на передавальній стороні \mathbf{R}_T , через що число ЕСС може в гіршому випадку кореляції не зростати в порівнянні з SІМО каналом.

Таким чином, у загальному випадку діапазон зміни числа ЕСС МІМО каналу із завмираннями Накагамі-Райса може становити

$$m k \leq \rho(\mathbf{R}, \mathbf{R}_T, \overline{Q_{\Sigma}^2}) \leq M_r M_t m k. \quad (18)$$

Формули для оцінювання ймовірності помилки за кількістю ЕСС (15) і (17), а також допоміжні графіки (рис. 1, 2) залишаються справедливими для МІМО каналу.

Висновки.

Проведений аналіз залежності ймовірності помилки від кількості антен, кореляції і характеру завмирань в МІМО каналі показав, що найгіршим випадком кореляції, відповідним максимальній ймовірності помилки, є загальні завмирання в багатопробному каналі, в цьому випадку МІМО канал з будь-якою кількістю антен еквівалентний за завадостійкістю SІСО каналу з тим же типом завмирань, тобто при загальних завмираннях виграш просторового рознесення відсутня, число ЕСС є мінімальним.

Найкращим випадком кореляції, що відповідає мінімальній ймовірності помилки, є незалежні завмирання в каналі, при цьому число ЕСС збільшується в порівнянні з випадком загальних завмирань в $M_r M_t$ разів і при збільшенні кількості антен розглянутий МІМО канал в граничному випадку еквівалентний за завадостійкістю SІСО каналу без завмирань.

Перспективним напрямом подальших досліджень є розробка методів та методик управління параметрами багатоантенних засобів радіозв'язку в умовах складної радіоелектронної обстановки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Голяницкий И. А. Математические модели и методы в радиосвязи. под ред. Ю. А. Громакова. – М: Эко-Трендз, 2005. – 440 с.
2. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: „Вильямс”, 2003. – 1104 с.
3. Слюсар В.И. Системы МІМО: принципы построения и обработка сигналов // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2005. – № 8. – С. 52 – 59.

4. Волков Л.Н. Системы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики: Учебное пособие. Немировский М.С., Шинаков Ю.С. – М: Эко-Трендз, 2005. – 392 с.
5. Григорьев В. А. Сети и системы радиодоступа. Лагутенко О. И., Распаев Ю. А. – М.: Око-Трендз, 2005. – 384 с.
6. Вишневский В.М. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. Ляхов А.И., Портной С.Л., Шахнович И.В. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.
7. Кравчук С.О. Моделі ергодичної пропускну́ї здатності і імовірності помилки багатоантенної радіосистеми з просторово-часовим кодуванням в каналі із завмираннями / Кравчук С.О., Міночкін Д.А. // Збірник наукових праць ВІКНУ ім. Тараса Шевченка. – 2009. – № 20. – С. 63 – 71.
8. Foschini G.J. Layered Space-Time Architecture for Wireless Communications in a Fading Environment when Using Multiple Antennas // Bell Labs Technical Journal. Autumn 2008. V. 1. P. 41 – 59.
9. Голдсмит А. Беспроводные коммуникации / А. Голдсмит. – М.: Техносфера, 2011 – 904 с.
10. Draft standard IEEE 802.11n. Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications. May 2008.
11. Telatar I.E. Capacity of Multi-antenna Gaussian Channels // European Transactions on Telecommunications. 2009. V. 10; No. 6. P. 585 – 595.
12. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Советское радио, 1970. – 728с.
13. Кувшинов О. В. Теорія електричного зв'язку. Ч. 2: Основи теорії завадостійкості, кодування та інформації: Підручник. Лівенцев С. П., Лежнюк О. П., Міночкін А. І., Могилевич Д.І. – К.: ВІТІ НТУУ „КПІ”, 2008. – 286 с.